Problème n° 1

(à traiter sur une feuille séparée du problème n°2)

Ce problème comprend trois parties

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n de la variable réelle x définie sur [- 1 ; 1] par :

$$f_n(x) = \sin(2n \operatorname{Arcsin} x)$$

Première partie

1°) Etudier la parité de f_n ; calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2°) Résoudre dans [0 ; 1] l'équation : $f_n(x) = 0$.

3°) a) Démontrer que f_n est continue sur [- 1 ; 1] ; dérivable sur] - 1 ; 1 [; calculer $f'_n(x)$.

b) Etudier la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x - 1}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

f_n est-elle dérivable à gauche en 1 ? à droite en (- 1) ?

4°) Déterminer le développement limité de f_n à l'ordre 3 au voisinage de 0.

5°) Calculer : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$

6°) a) Etudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$ (Unité : 4 cm).

On précisera une équation de la tangente T à C_1 au point d'abscisse nulle et la position de C_1 par rapport à T au voisinage du point 0.

b) Calculer, en cm^2, l'aire A de l'ensemble des points du plan de coordonnées x et y vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le f_1(x) \end{cases}$$

Deuxième partie

1°) Pour tout entier naturel non nul p et pour tout réel x de $[\ 0\ ;\ 1\ [$, on considère l'intégrale :

$$J_p(x) = \int_0^x \frac{f_p^2(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

a) Calculer $J_p(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{2p}(x)$.

b) Déterminer, si elle existe, la limite de $J_p(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

2°) Pour tout couple $(p\ ,\ q)$ d'entiers naturels non nuls, $p > q$, et pour tout réel x de $[\ 0\ ;\ 1\ [$, on considère l'intégrale :

$$K_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{f_p(t)\ f_q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

a) Calculer $K_{p,q}(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{p+q}(x)$ et $f_{p-q}(x)$.

b) Déterminer, si elle existe, la limite de $K_{p,q}(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Troisième partie

1°) En utilisant la formule de Moivre, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers relatifs tel que, pour tout réel θ, on ait l'égalité :

$$\sin(2n\theta) = \sin\theta\ .\ \cos\theta\ .\ P_n(\sin\theta)$$

2°) a) Déduire de la relation précédente que pour tout réel x de $[\ -\ 1\ ;\ 1\ ]$:

$$f_n(x) = x\sqrt{1 - x^2}\ P_n(x)$$

b) Expliciter : $P_1(x)$; $P_2(x)$; $P_3(x)$.

3°) a) Montrer que l'on peut écrire :

$$P_n(x) = a_0 + a_1\ x^2 + \ldots\ldots + a_p\ x^{2p} \qquad (\ p \in \mathbb{N}\ ;\ a_p \neq 0\ )$$

b) Déterminer en fonction de n les valeurs de p , a_p , $P_n(0)$, $P_n(1)$.

4°) a) Résoudre successivement, dans [0 ; 1] ; [- 1 ; 1] ; $\mathbb{R}$, l'équation $P_n(x) = 0$.

b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, calculer :

$$U_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

Problème n° 2

(à traiter sur une feuille séparée du problème n°1)

PRELIMINAIRES

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels.

Pour tout entier naturel k, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

m désigne un entier naturel strictement supérieur à 2.

n est un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\frac{m}{2}$.

On note J l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à m.

Soit A un élément de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$A = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 X + a_0$$

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel A ne s'annule pas.

Soit f l'application de $\mathbb{R}_m[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = AP' - PA'$, où P' et A' sont respectivement les polynômes dérivés de P et A.

QUESTIONS

1°) a) Déterminer en fonction de m et n la valeur maximale p du degré du polynôme f (P).

b) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que QA soit élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer f (QA).

d) En utilisant une formule de dérivation sur I, déterminer le noyau de f (noté Kerf). En déduire le rang de f.

2°) Pour tout i élément de J, on pose : $Y_i = f(X^i)$.

a) Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i \in J \setminus \{n\}}$ est une base de l'image de f (notée Imf).

b) En calculant f (A), déterminer les coordonnées de Y_n dans cette base.

3°) a) Pour tout i élément de J, étudier le degré du polynôme Y_i (noté $d^\circ Y_i$).

b) Déterminer la valeur minimale du degré d'un polynôme S non nul de Imf.

c) En utilisant la question 1°) c), montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_P[X]$ divisible par A^2 appartient à Imf.

En déduire qu'un polynôme S de $\mathbb{R}_P[X]$ appartient à Imf si, et seulement si, le reste R de sa division euclidienne par A^2 appartient à Imf.

Pour tout polynôme S de Imf, déterminer alors la valeur maximale du degré de R.

4°) a) Soit P élément de $\mathbb{R}_m[X]$, déterminer l'ensemble des primitives sur I de :

$$\frac{S}{A^2} \text{ avec } S = f(P), \text{ que l'on notera } \int \frac{S(x)}{A^2(x)}\,dx$$

b) En déduire $\displaystyle\int \frac{Y_i(x)}{A^2(x)}\,dx$, pour tout i élément de J.

5°) Dans cette question, m est un entier naturel strictement supérieur à 6.

On donne A défini par $A = X^3 - X + 1$

a) Calculer Y_0 ; Y_1 et Y_2.

b) Montrer que le polynôme $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ est élément de Imf.

c) Déterminer $\displaystyle\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}\,dx$ (on pourra utiliser la question 4°).

d) Donner une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les réels a, b, c, d et e pour que le polynôme

$$aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \text{ soit élément de Imf.}$$